Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предуниверситарий НИЯУ МИФИ
Университетский лицей №1523

Пособие по элективному курсу

«Преобразования плоскости. Движения»

Авторы проекта
Учащиеся лицея 1523
Состав команды: Прохорова Татьяна 10М, Бердникова Анна 10М,
Мазо Матвей 10М, Авдеева Алёна 10М
Руководители: Богдановская Марина Владимировна,
Гусева Наталья Николаевна

Оглавление

Преобразования плоскости 3

Параллельный перенос 5

Примеры решения задач 7

Задачи для самостоятельного решения 11

Осевая симметрия 14

Примеры решения задач 15

Задачи для самостоятельного решения 20

Центральная симметрия 22

Примеры решения задач 23

Задачи для самостоятельного решения 30

Поворот 31

Примеры решения задач 33

Задачи для самостоятельного решения 40

Преобразования плоскости

Если каждой точке плоскости ставится в соответствие некоторая точка из этой же плоскости, и если при этом любая точка плоскости оказывается сопоставленной определенной точке, то говорят, что это *отображение плоскости на себя.*

Взаимно однозначное отображение множества X на себя называется *преобразованием этого множества*.

Необходимым и достаточным признаком преобразования множества X является одновременное выполнение двух условий:

1) каждый элемент множества X имеетединственный образ в этом множестве;

2) каждый элемент множества X имеет единственный прообраз в этом множестве.

Обозначим символом G (X) множество всех преобразований данного множества X. Пусть f и g – два преобразования множества X (т. е.$f \in G(X)$, $g \in G(X)$ и для произвольного элемента x множества X:

$$f(x) = y,\ g(y) = z,$$

причем y и z – элементы множества X. Преобразование

$\varphi(x) = g(f(x)) = z$называется *композицией* (или произведением) *преобразований* f и g: $\phi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Обычно преобразование, которое в композиции выполняют первым, записывается справа.

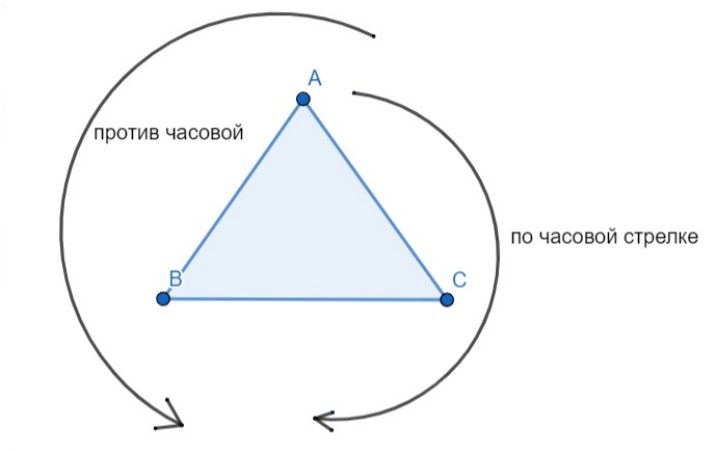
Преобразование E множества X называется *тождественным*, если для любого элемента x множества X: $E(x) = x$, т. е. преобразование E каждый элемент x множества X преобразует в себя.

Движение плоскости – преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками. Т.е. преобразование f плоскости называется движением

плоскости, если оно отображает всякие две точки A и B на такие две точки A_1 и B_1, что $A_1B_1 = AB$.

Следствия:

1) Преобразование, обратное движению, есть движение.
2) Композиция движений является движением.



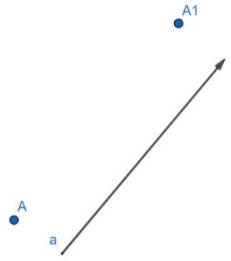
Треугольник ABC ориентирован положительно, если обход по контуру треугольника от вершины A к вершине B и затем к вершине совершается против часовой стрелки. Следовательно, если обход по движению часовой стрелки, *то треугольник ориентирован отрицательно* (ориентация зависит от порядка записи вершин).

Движение первого рода – движение плоскости, сохраняющее ориентацию треугольников.

Движение второго рода – движение плоскости, изменяющее ориентацию треугольников на противоположную.

Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется преобразование плоскости, при котором каждая точка A плоскости переходит в такую точку A_1, что вектор $\overrightarrow{AA_1}$ равен вектору $\vec{a}$.



Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ обозначается $T_{\vec{a}}$; $T_{\vec{a}}(A) = A_1$.

Из определения следует, что параллельный перенос может быть задан парой соответствующих точек.

Свойства параллельного переноса:

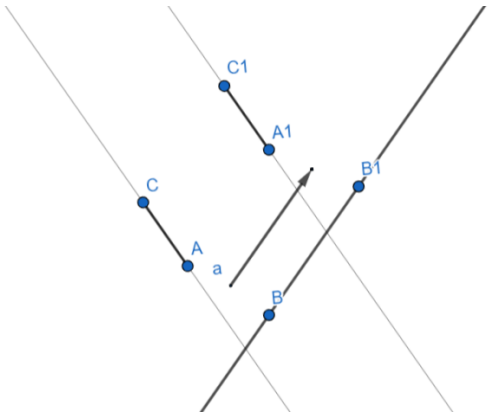
1) Параллельный перенос является движением первого рода.

2) Параллельный перенос на нулевой вектор $\vec{0}$ является тождественным преобразованием: $T_{\overrightarrow{AA}} = T_{\vec{0}} = E$.

3) Преобразование, обратное параллельному переносу на вектор $\vec{a}$, есть параллельный перенос на вектор, противоположный вектору $\vec{a}$: $\left(T_{\vec{a}}\right)^{-1} = T_{-\vec{a}}$.

4) Композиция двух параллельных переносов есть параллельный перенос: $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$.

5) Композиция любых двух параллельных переносов коммутативна: $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}} = T_{\vec{b}+\vec{a}} = T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}}$

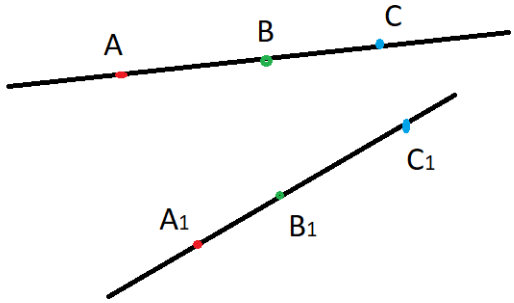


6) Параллельный перенос отображает любую прямую, не параллельную вектору переноса, на параллельную ей прямую.

7) Каждая прямая, параллельная вектору параллельного переноса, отображается сама на себя, т. е. является инвариантной прямой этого переноса.

8) Параллельный перенос отображает луч на сонаправленный ему луч.

Т1. При движении фигуры F образами точек, лежащих на одной прямой, являются три точки, лежащие на одной прямой, а образами трёх точек, не лежащих на одной прямой, являются три точки, не лежащие на одной прямой.



Доказательство:

Пусть точки A, B и C лежат на прямой F так, что $AC = AB + BC$.

Рассмотрим движение f прямой F.

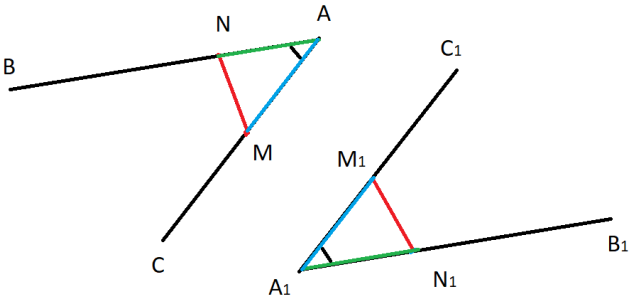
Пусть $f(A)= A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$. Из определения следует, что $AC = A_1C_1$, $AB =A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. То есть $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$, откуда следует, что точка B_1 принадлежит отрезку A_1C_1 и точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Следствие:

При движении луча/отрезка/прямой/угла образами являются соответственно луч/отрезок/прямая/угол.

Рассмотрим пример:

Отметим на лучах AC и AB точки M и N соответственно. Пусть $f(A) = A_1$, $f(B) =B_1$, $f(M) = M_1$ и $f(N) =$



N_1. Точки M_1 и N_1принадлежат лучам A_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Поскольку $A_1M_1 = AM$, $A_1N_1 = AN$ и $MN = M_1N_1$, треугольник AMN равен треугольнику $A_1M_1N_1$(по трем сторонам). Из равенства треугольников следует равенство соответствующих углов, отсюда $\angle A = \angle A_1$.

Примеры решения задач

1. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ {2;2} точка M (1; 5) переходит в точку P. Укажите координаты точки P.

Решение

Координата точки P на оси абсцисс равна $M(x) + \overrightarrow{AB}(x) = 1+2 = 3$

По оси ординат:

$M(y) + \overrightarrow{AB}(y) = 5+2 = 7$

Ответ: P (3; 7).

2. При параллельном переносе на $\vec{m}$ {5; 4} точка A (0; 4) отображается на точку A_1. Найдите координаты точки A_1.

Решение

Для того, чтобы посчитать абсциссу точки A_1, необходимо прибавить абсциссу вектора к абсциссе точки A. Т.е. A_{1X}= 5+0. С ординатой также:

$A_{1Y} = \vec{m}_y + A_Y = 8$

Таким образом A_1 (5; 8).

Ответ: A_1 (5; 8).

3. Выполнили перенос прямой $2y - 5x = 1$. Найдите уравнение этой прямой, если она проходит через точку С (a, b).

Решение

Сначала выразим yиз данной прямой:

$$y = \frac{5x + 1}{2}$$

коэффициент при $x = 5/2 \Rightarrow k = 2{,}5$

отсюда:

$$y - b = 2{,}5(x - a)$$

$$y - b = 2{,}5x - 2{,}5a$$

$$y - 2{,}5x = -2{,}5a + b$$

Ответ: $y - 2{,}5x = -2{,}5a + b$.

4. При параллельном переносе образом точки A (0; 0) является точка B (−2; 6). Какая точка является образом точки C (1; -7)?

Решение

Если образом точки A является точка B, то координаты вектора, по которому происходит перемещение, будут равны

$\vec{m}_y = B_Y - A_Y = -2 - 0 = -2$

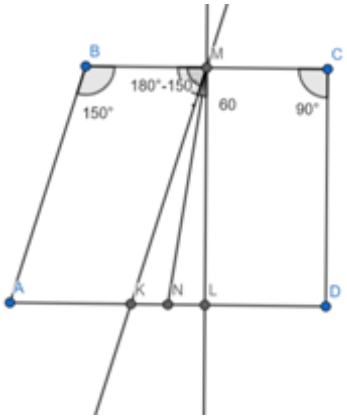
$\vec{m}_x = B_X - A_X = 6 - 0 = 6$

Отсюда $\vec{m}\{-2; 6\}$. Значит теперь, чтобы найти образ точки C, необходимо посчитать её отображение на вектор$\vec{m}$. D (−2 + 1; 6+(−7)), D (−1; −1) .

Ответ: D (−1; −1).

5. В четырёхугольнике $ABCD$ угол B равен 150°,угол C прямой, а стороны AB и CD равны. Найдите угол между стороной BCи прямой, соединяющей середины сторон BC и AD.

Решение



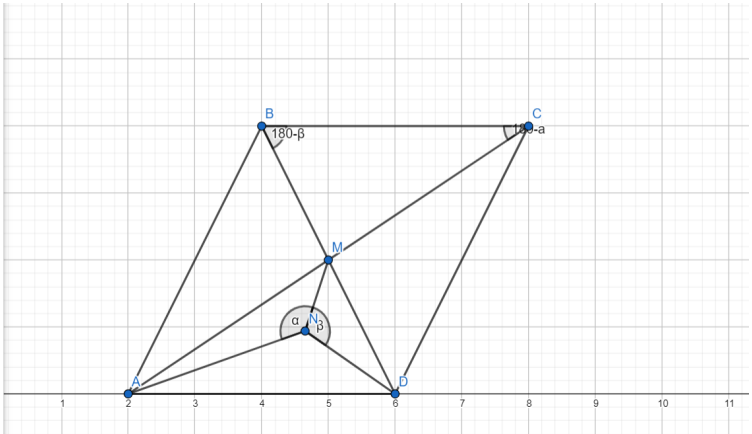
Пусть M — середина BC, N — середина AD. Построим параллелограмм $ABMK$ и прямоугольник $CDLM$. Тогда $AKDL$ — тоже параллелограмм (стороны AK и LD равны и параллельны). Значит, N является и серединой диагонали KL. В треугольнике KML $\angle KML = \angle KMC - \angle LMC = 150° - 90° = 60°$, а $KM = ML$, следовательно, он равносторонний. Поэтому медиана MN служит и биссектрисой, т. е. $\angle KMN = 30°$, а $\angle BMN = \angle BMK + \angle KMN = 30° + 30° = 60°$.

Ответ: 60°.

6. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M, а внутри треугольника AMD точка N, причём

$\angle MNA + \angle MCB = \angle MND + \angle MBC = 180°$. Докажите, что прямые MN и AB параллельны.

Решение



Обозначим $\angle MNA = \alpha$, $\angle MND = \beta$. Тогда

$\angle MCB = 180° - \alpha$, $\angle MBC = 180° - \beta$.

Пусть при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$

точка M перешла в точку M'. При этом треугольник BMC перешёл в треугольник $AM'D$. Четырёхугольник $ANDM'$ вписанный, поскольку

$\angle AM'D + \angle AND = \angle BMC + \angle AND =$

$= (180° - (180° - \alpha) - (180° - \beta)) + 360° - \alpha - \beta = 180°.$

Поэтому

$\angle M'ND = \angle M'AD = \angle MBC = 180° - \beta.$

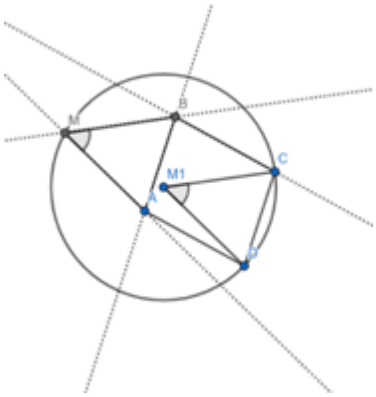
Значит,

$\angle MND + \angle M'ND = \beta + (180° - \beta) = 180°.$

Следовательно, точки M, N и M' лежат на одной прямой, а так как $MM' \parallel AB$ (по построению точки M'), то $MN \parallel AB$.

7. На стороне AB ромба $ABCD$ во внешнюю сторону построили правильный треугольник AMB. Найдите угол CMD.

Решение

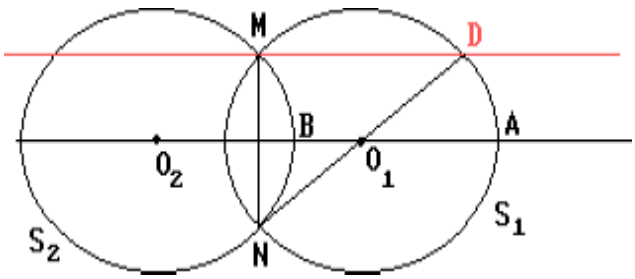


При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AD}$ правильный треугольник AMB перейдёт в равный ему правильный треугольник DM_1C. Поскольку $M_1C = M_1D = M_1M$, точка M_1 — центр окружности, описанной около треугольника CMD. Тогда CM_1D — центральный угол этой окружности, соответствующий вписанному углу CMD.Следовательно, $\angle CMD = \frac{1}{2}\angle CM_1D = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Ответ: 30°.

8. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN сэтими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Найдите $4R^2$, если AB = 8, а $MN = 6$.

Решение



Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей S_1 и S_2, точка A лежит на окружности S_1, B — на окружности S_2, A — между B и O_1.Через точку M проведём прямую, параллельную O_1O_2. Пусть D — её точка пересечения с окружностью S_1. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO_1}$ окружность S_1 перейдёт в окружность S_2, точка D — в точку M, точка A — в точку B. Поэтому отрезок DM равен и параллелен отрезку AB, а $\angle DMN = 90°$. Тогда DN — диаметр окружности.

Следовательно, $4R^2 = DN^2 = DM^2 + MN^2 = AB^2 + MN^2 = 100 \Rightarrow 4R^2 = 100$.

Ответ: 100.

Задачи для самостоятельного решения

1. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ {0;5} точка P (2; −4) переходит в точку T. Укажите ординату точки T.

Ответ: (2; 1)

2.При параллельном переносе на $\vec{m}\{-7; 1\}$ точка A (6; 3) отображается на точку A_1. Найдите координаты точки A_1.

Ответ: (−1; 4).

3. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка K (2; −1) отображается на ту же точку, что и при симметрии относительно начала координат. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

Ответ: (−4; 2).

4. При параллельном переносе на вектор $\vec{l}$ образом точки A (−2; 0) является точка B (3; 2). Какая точка является образом точки C (2; −4) на тот же вектор?

Ответ: (7; −2).

5. Выполнили параллельный перенос прямой $-x + 4y = 0$. Запишите уравнение полученной прямой, если она проходит через точку A (−2; −1).

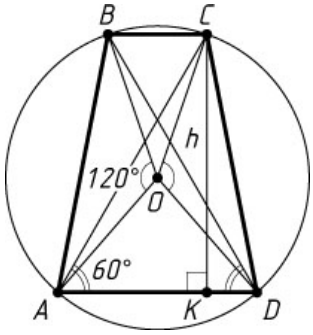
Ответ: $4y - x = -2$.

6. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC, если $AC = a$, $PQ = a\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

7. Трапеция со средней линией a вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом 120°. Найдите высоту трапеции.

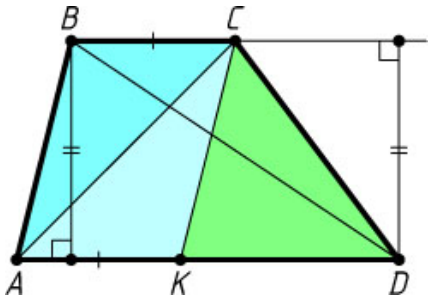
Ответ: $a\sqrt{3}$.



8. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 12, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен 60°. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $108\sqrt{3}$.

9. Диагональ трапеции делит её площадь в отношении 1: 5. В каком отношении разделится площадь этой трапеции, если из конца меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне?



Ответ: 1: 2.

10.Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Точки *M* и *N* — середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Окружность, проходящая через вершины *B* и *C*, пересекает боковые стороны *AB* и *CD* в точках *P* и *Q* соответственно, причём точка *P* лежит между *B* и *M*, а точка *Q* — между *C* и *N*.

Найдите *PM* и *QN*, если известно, что $AQ \perp BQ$, $AB = 8$, $BC = 1$, $CD = 10$, $AD = 7$, если точки *P*, *Q*, *M* и *N* лежат на одной окружности.

Ответ: 3; 4,8.

Осевая симметрия

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно прямой* l, если l – серединный перпендикуляр к отрезку AA_1.

Осевая симметрия с осьюl – это преобразование, переводящее любую точку A в точку A_1, симметричную точке A относительно прямой l. Точки прямой l остаются при этом преобразовании неподвижными. Симметрию относительнооси l называют также отражением от прямой l.

Обозначается осевая симметрия символом: S_l.

Свойства осевой симметрии:

1) Осевая симметрия – это преобразование, обратное самому себе: $(S_l)^{-1}= S_l$. Отсюда непосредственно следует, что композиция двух симметрий с одной и той же осью есть тождественное преобразование: $S_l \circ S_l = E$.

2) Осевая симметрия есть движение второго рода.

3 Любая прямая, перпендикулярная оси симметрии, является инвариантной прямой.

4) Две прямые, симметричные друг другу относительно оси l, либо пересекаются в точке, принадлежащей оси l, либо параллельны оси l.

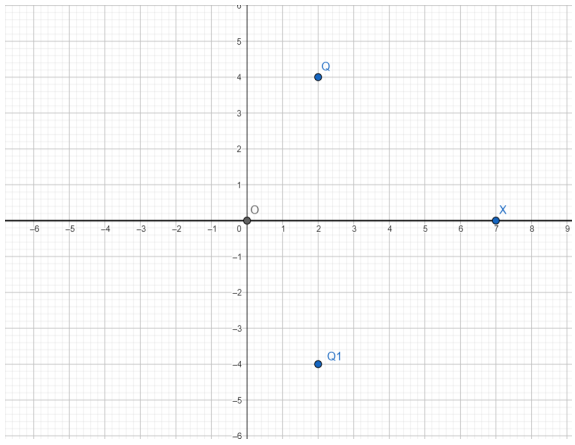
Если при симметрии относительно оси l фигура F отображается на себя, то прямая l – *ось симметрии фигуры* F (фигура F симметрична относительно оси l).

Правильный n-угольник имеет n осей симметрии, все они пересекаются в его центре. Осью симметрии окружности является любая прямая, проходящая через ее центр.

Примеры решения задач

1. При симметрии относительно оси абсцисс точка $Q(2; 4)$ отображается в точку Q_1. Найдите координаты точки Q_1.

Решение



Симметрия относительно оси Ox, следовательно абсцисса точки Q_1будет той же, что и у Q, а ордината станет равной $(-Q_x)$.

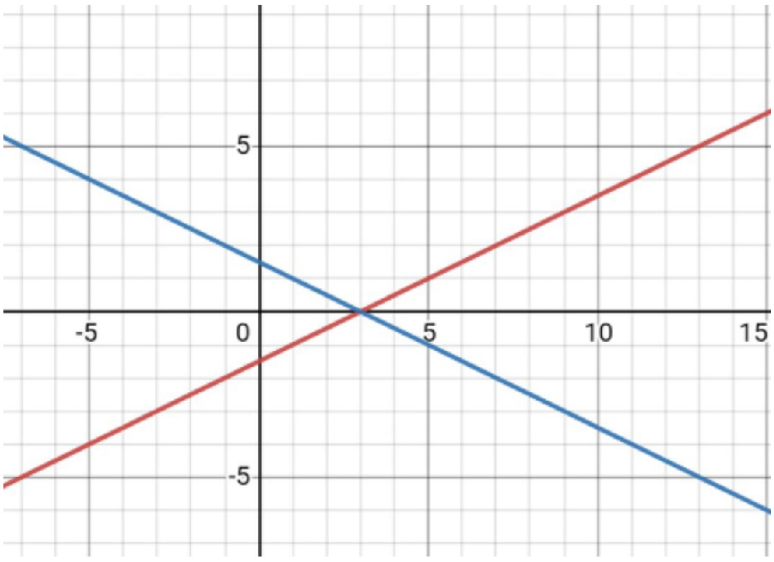
Ответ: $Q_1(2; -4)$.

2. На какую прямую отображается прямая $x - 2y = 3$ относительно оси:

а) абсцисс

б) ординат?

Решение



а) чтобы отразить график относительно оси абсцисс (оси x) необходимо изменить знак при y в изначальной функции.

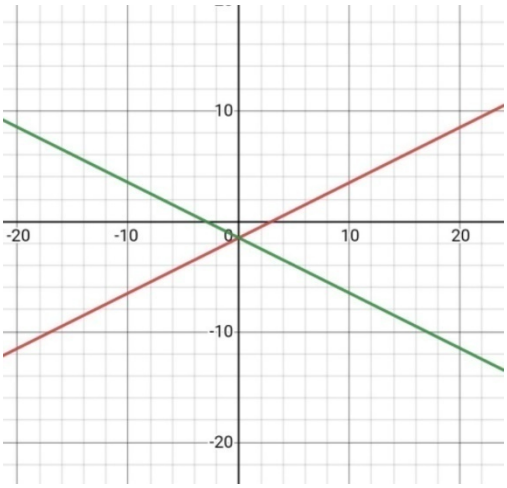
$x - 2y = 3$ (коэффициент при $y = -2$)

следовательно, отображенная прямая будет:

$x + 2y = 3$ (коэффициент при $y = +2$) .

Ответ: $x + 2y = 3$.

б) соответственно, при отражении графика относительно оси ординат необходимо изменить знак коэффициента при x.



$x - 2y = 3$ (коэффициент при $x = 1$)

следовательно, отображеннаяпрямая будет:

$-x - 2y = 3$ (коэффициент при $x = -1$) .

Ответ: $-x - 2y = 3$.

3. . Даны точки A, B и прямая l, образующая с прямой AB угол $0° < \alpha < 90°$. Точки A и B не принадлежат прямой l и лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой. Точки C и D симметричны точкам B и A соответственно относительно прямой l. Докажите, что фигура $ABCD$ – трапеция.

Решение

1) Поскольку пары точек A, D и B, C симметричны относительно одной и той же прямой, прямые AD и BC будут обе перпендикулярны прямой l, следовательно, параллельны друг другу.

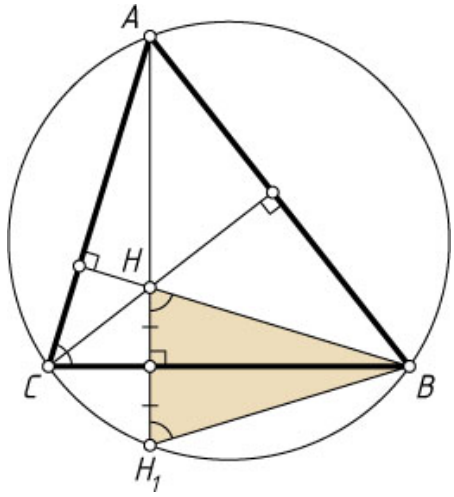
$$AD \perp l;\ BC \perp l \ => \ AD \parallel BC$$

2) Прямые AB и CD симметричны относительно прямой l и не параллельны ей по условию. Тогда эти прямые пересекаются на прямой l, а значит не параллельны друг другу.

Тогда $AB \nparallel CD$, $AD \parallel BC$ => $ABCD$ – трапеция по определению.

4. Доказать, что точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) остроугольного треугольника ABC относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на описанной окружности этого треугольника.

Решение

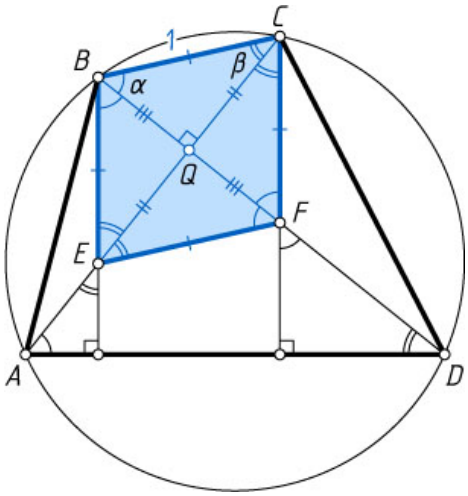


H — точка пересечения его высот, H_1 — точка пересечения продолжения отрезка AH за точку H с описанной окружностью треугольника ABC. Тогда$\angle BH_1H = \angle BH_1A = \angle ACB = \angle BHH_1$.

Поэтому треугольник HBH_1 — равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр BC к его стороне HH_1 проходит через середину отрезка HH_1, т. е. точка H_1 симметрична точке H относительно прямой BC.

5. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите BC, если $EF = 1$.

Решение



Решим задачу двумя способами:

Первый способ. Обозначим $\angle CBD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$ ($\alpha + \beta = 90°$). Тогда $\angle CAD = \alpha$, $\angle BEC = 90° - \alpha = \beta$, $\angle DBE = \alpha$. Следовательно, $BE = BC$.

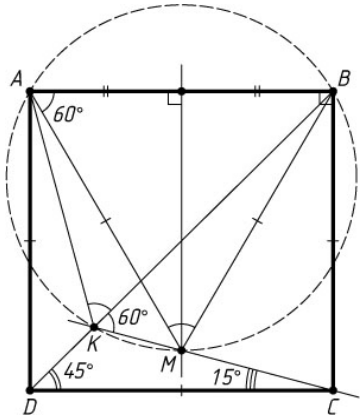
Аналогично $\angle ACF = \beta$. Поэтому $CF = BC$. Значит, $BE = CF$, а так как $BE \parallel CF$ (перпендикуляры к одной и той же прямой

AD), то $BCFE$ — параллелограмм (даже ромб). Следовательно, $BC = EF = 1$.

Второй способ. Пусть Q — точка пересечения диагоналей. Заметим, что E — точка пересечения высот треугольника ABD. По известному свойству ортоцентра треугольника $EQ = QC$. Аналогично $FQ = QB$. Поскольку диагонали четырёхугольника $BCFE$ перпендикулярны и делятся точкой пересечения Q пополам, то $BCFE$ — ромб. Следовательно, $BC = EF = 1$.
Ответ: 1.

6. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а серединный перпендикуляр к стороне AB — в точке M (M между C и K). Найти $\angle DCK$, если$\angle AKB = \angle AMB$.

Решение.



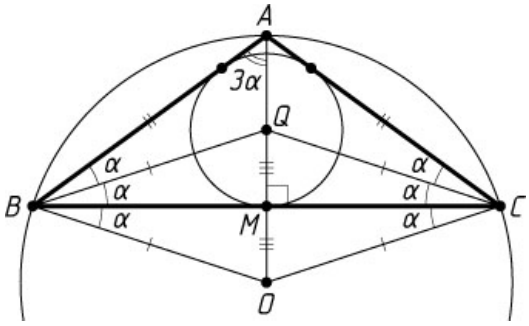
Поскольку $\angle AKB = \angle AMB$, то точки M, K, A и B лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы BKM и BAM опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle BKM = \angle BAM$, а так как из симметрии $\angle AKB = \angle BKM$, то $\angle AMB = \angle BAM$, поэтому $MB = AB$. Кроме того, точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, поэтому $MA = MB$, значит, треугольник AMB — равносторонний. Следовательно,
$\angle BKM = \angle AMB = 60°$, $\angle DCK = \angle BKM - \angle KDC = 60° - 45° = 15°$.
Ответ: 15°.

7. Центр описанной окружности (точка O) треугольника ABCсимметричен его центру вписанной окружности (точка Q) относительно BC. Найдите угол $\angle ABC$.

Решение

Обозначим $\angle OBC = \angle QBC = \alpha$. $BO = OC = OA$, т. к. BO, OC и OA равны радиусу описанной окружности =>$\angle QCB = \angle OCB = \angle OBC = \alpha$, а так как BQ

— биссектриса угла ABC, то $\angle ABC = 2\alpha$. Аналогично, $\angle ACB = 2\alpha$. Значит, треугольник ABC — равнобедренный, его биссектриса AM является высотой, а точки Q и M лежат на отрезке OA.

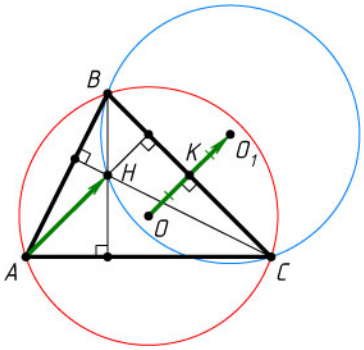


Поскольку треугольник AOB также равнобедренный, то$\angle OBA = \angle OAB$, или $3\alpha = 90° - 2\alpha$.Отсюда находим, что $\alpha = 18°$. Следовательно, $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha = 36°$.

Ответ: 36°.

8. Найдите расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот, если расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны равно а, точка H – точка пересечения высот треугольника и точка O – центр описанной окружности.

Поскольку $\angle BHC = 180° - \angle A$, то радиусы описанных окружностей треугольников ABC и HBC равны (каждый из них равен $\frac{BC}{2\sin\angle A}$). Следовательно, эти окружности симметричны относительно прямой BC.



Если O и O_1 — их центры, то $OK = O_1K$ (K — середина BC). С другой стороны, эти окружности переходят друг в друга при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO_1}$.

Следовательно, $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{HA}$, поэтому $HA = O_1O = 2OK = 2a$.

Ответ: $2a$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При симметрии относительно оси абсцисс точка K (2; 5) отображается на точку K_1 с координатами.

Ответ: (2; −5).

2. При симметрии относительно оси ординат на точку M_1 с координатами (8; 2) отображается точка M с координатами.

Ответ: (−8; 2)

3. При симметрии относительно оси абсцисс прямая $y = 3 - 2x$ отображается на прямую

1) $y + 2x = 3$

2) $-y - 2x = -3$

3) $y - 2x + 3 = 0$

4) $y + 2x = -3$

Ответ: 3

4. Диагонали ромба лежат на координатных осях. Найдите координатывершин ромба, если середина одной из его сторон имеет координаты (−2; 4).

Ответ (−4; 0); (0; 8); (0; −8); (4; 0).

5. Осями симметрии прямоугольника являются прямые $y = -3$ и $x = 0$. Одна из его вершин имеет координаты (4; 1). Найдите координаты остальных вершин прямоугольника.

Ответ: (−4; −7); (−4; 1); (4; −7).

6. Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую в точках C и D, а диаметр AB — в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $CN = 4$, $DN = 9$. Найдите MN.

Ответ: 6.

7. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка K — середина стороны AB, точка M лежит на стороне BC, причём BM: MC = 1 : 3. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM — наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC?

Ответ: $\frac{2}{3}$.

8. Дан треугольник ABC и построена вневписанная окружность с центром O, касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Точка O_1 симметрична точке O относительно прямой BC. Найдите величину угла A, если известно, что точка O_1 лежит на описанной около треугольника ABC окружности.

Ответ: 60°.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD = BD$ и $\angle ADB = 2\angle BDC$. Известно, что $\angle ACD = 110°$. Найдите $\angle ADC$.

Ответ: 30°.

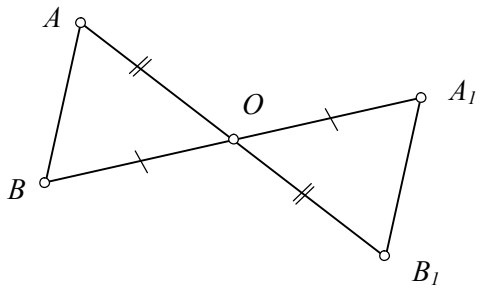
Центральная симметрия

Точки A и A_1называются *симметричными* относительно точки O, если O – середина отрезка AA_1. *Центральная симметрия с центром O* – это преобразование,переводящее любую точкуA в точку A_1, симметричную точке A относительно точки O. Наплоскости центральная симметрия есть поворот вокруг точки O наугол $\alpha = 180°$. Обозначается центральная симметрия символом: Z_O.

Симметрию с центром в точке O называют также *отражением от точки O.*

Теорема. Центральная симметрия есть движение.

Доказательство. Если $Z_O(A) = A_1$ и $Z_O(B) = B_1$, то для любых точек A и B плоскости $A_1B_1 = AB$, что непосредственно усматривается из равенства треугольников OAB и OA_1B_1. В случае, когда точки O, A и B коллинеарны, равенство этих расстояний так*ж*е очевидно.



Свойства центральной симметрии:

1. Центральная симметрия – это преобразование, обратноесамому себе: $(Z_O)^{-1} = Z$.Отсюда непосредственно следует, чтокомпозиция двух симметрий с одним и тем же центром есть тождественное преобразование: $Z_O \cdot Z_O = E$.

2. Композиция двух центральных симметрий с различными центрами O_1и O_2 есть параллельный перенос на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{I_1 I_2}$.

3. Любая прямая, проходящая через центр симметрии, естьинвариантная прямая преобразования.

4. При центральной симметрии прямая, не проходящая черезцентр симметрии, отображается на параллельную ей прямую.

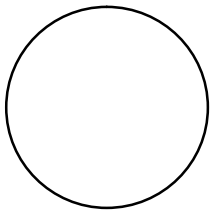
5.Центральная симметрия плоскости есть движение первого рода.

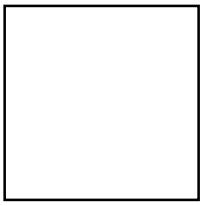
Если при симметрии относительно точки *O* фигура *F* отображается на себя, то говорят, что точка *O – центр симметрии фигуры F*. Правильный многоугольник с четным числом сторон имеет центр симметрии – это точка пересечения его больших диагоналей. Центром симметрии параллелограмма является точка пересечения его диагоналей. Пара пересекающихся прямых симметрична относительно точки пересечения этих прямых. Прямая имеет бесконечно много центров симметрии – она симметрична относительно каждой своей точки.

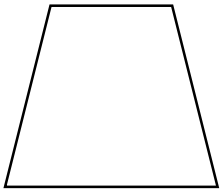
Центральная симметрия обычно используется в тех случаях, когда известна точка, являющаяся серединой какого-либо отрезка.

Примеры решения задач

1. Не обладает центром симметрии четырёхугольник, изображенный на рисунке под буквой:

а) 

б) 

в) 

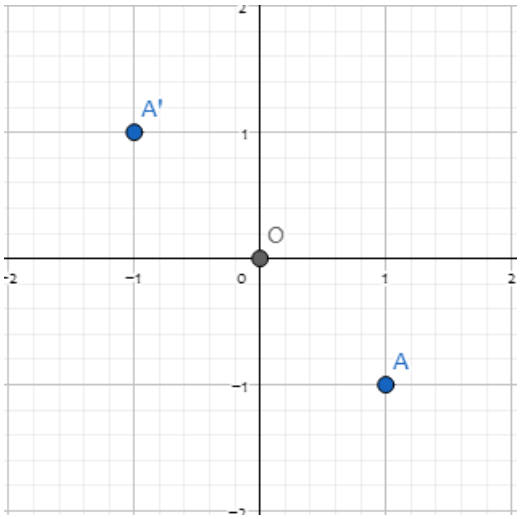
г)

Решение. Центральной симметрией называется симметрия относительно некоторой точки *O***.** Если для каждой точки фигуры есть симметричная ей точка относительно точки *O*, также принадлежащая этой фигуре, то фигура симметрична относительно точки *O*. У окружности такая точка – центр, у квадрата и прямоугольника – точка пересечения диагоналей. Для трапеции такой точки нет, поэтому и центра симметрии у трапеции также нет.

Ответ: в.

2. Точка *A* имеет координаты: $x = 1$; $y = -1$. Найдите координаты точки *B*, симметричной точке А относительно начала координат.

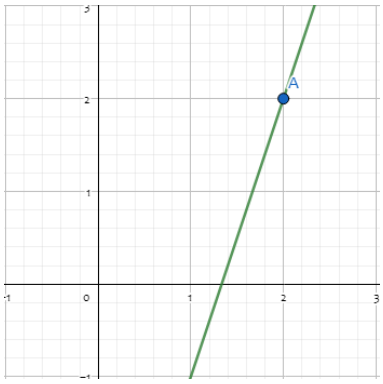
Решение. Изобразив симметричную точке *A* относительно начала координат точку *A*’ мы определяем ее координаты : (−1; 1).



Ответ: (−1; 1)

3. При центральной симметрии относительно точки M (2; 2) сама на себя отображается прямая

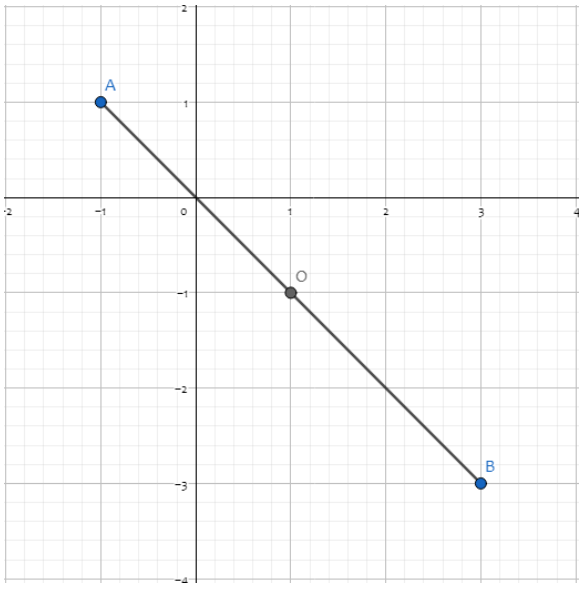
1) $2x - 4 = y$
2) $3x - 4 = y$
3) $3x - 3 = y$
4) $2x + 3 = y$



Решение. Прямая будет отражаться на себя относительно данной точки если она проходит через эту точку. Подставляем координаты точки в уравнения прямых и ищем верное равенство.

Ответ: 2.

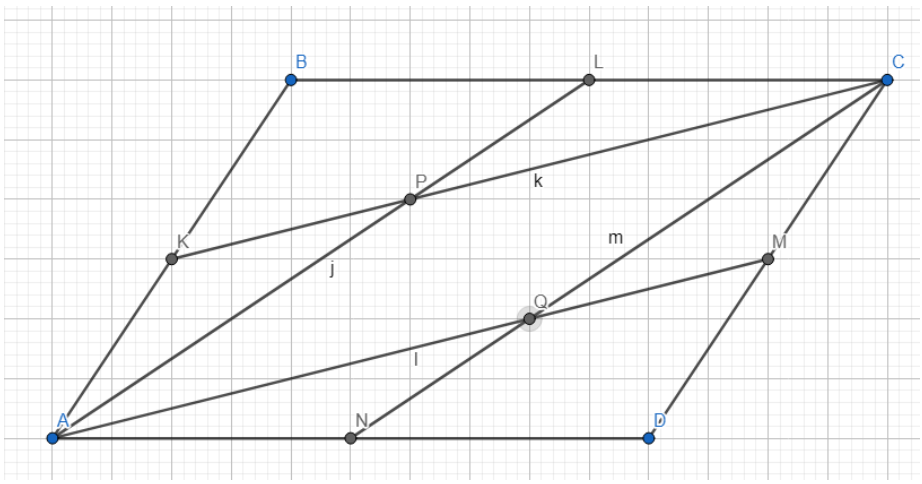
4.Найдите координаты точки, относительно которой симметричны точки A (−1; 1) и B (3; −3).



*Решение.*Центром симметрии для двух точек будет середина соединяющего их отрезка. Координаты этой точки можно найти как полусумму соответствующих координат заданных точек.

Ответ: (1; −1).

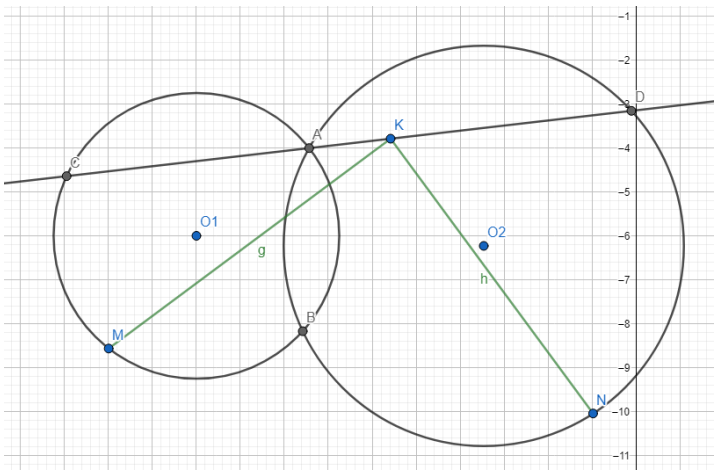
5. В четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N – середины сторон соответственно AB, BC, CD, DA. Прямые AL и CK пересекаются в точке P, прямые AM и CN – пересекаются в точке Q. Оказалось, что $APCQ$ – параллелограмм. Докажите, что $ABCD$ – тоже параллелограмм.



Решение

Из теоремы о средней линии треугольника следует, что *KLMN* – параллелограмм. Пусть *O* – его центр, т.е. общая середина отрезков *LN* и KM. При симметрии относительно точки *O* точка *K* переходит в точку *M*, луч *KC* – в противоположно направленный с ним луч *MA*, точка *L* – в точку *N*, луч *LA* – в противоположно направленный с ним луч *NC*. Значит, при этой симметрии точка *P* пересечения лучей *KC* и *LA* переходит в точку *Q* пересечения лучей *MA* и *NC*. Поэтому *O* – середина *PQ*, т.е. центр параллелограмма APCQ. Следовательно, *ALCN* – также параллелограмм (его диагонали делятся точкой пересечения *O* пополам). Тогда *CL* || *AN*. Аналогично, *CM* || *AK*. Отсюда следует утверждение задачи.

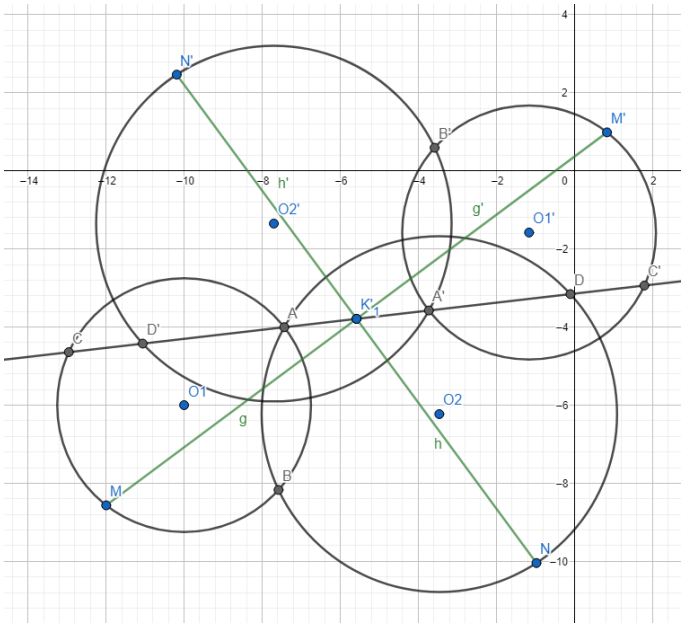
6. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *A* проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке *C*, а вторую — в точке *D*. Пусть *M* и *N* — середины дуг *BC* и *BD*, не содержащих точку *A*, а *K* — середина отрезка *CD*. Докажите, что $\angle MKN = 90°$. (Можно считать, что точки *C* и *D* лежат по разные стороны от точки *A*.)



Решение

При симметрии относительно точки K точка C переходит в точку D, а точка M – в некоторую точку M_1, причём отрезки DM_1 и CM равны и параллельны. Значит, $BM = CM = DM_1$, $BN = DN$. Обозначим $\angle CDM_1 = \alpha$, $\angle CDN = \beta$. Тогда $\angle ACM = \alpha$, $\angle ABM = 180° - \alpha$, $\angle ABN = 180° - \beta$, $\angle MBN = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = \angle NDM_1$.

Значит, треугольники MBN и M_1DN равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $NM = NM_1$. В равнобедренном треугольнике MNM_1 медиана NK является высотой, следовательно, $\angle MKN = 90°$.



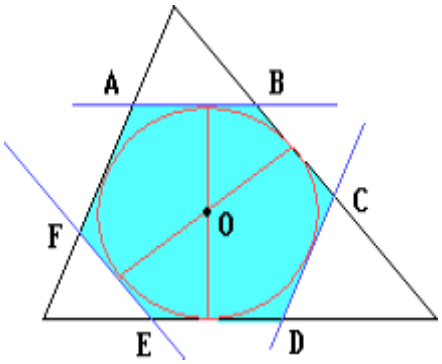
7. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны между собой.

Решение

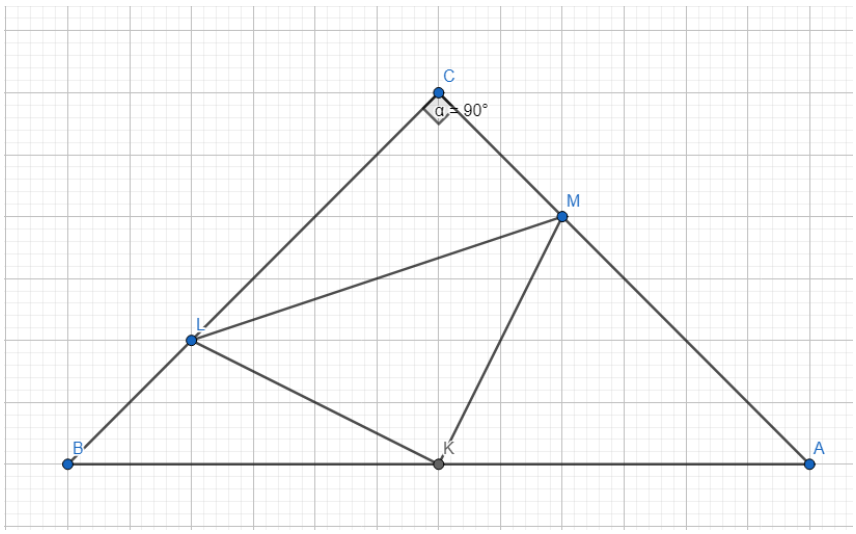
Пусть AB, CD и EF — стороны рассматриваемого шестиугольника $ABCDEF$, лежащие на указанных касательных. При симметрии относительно центра вписанной окружности данного треугольника прямая AB переходит в прямую DE, а прямая BC — в прямую EF. Поэтому точка B пересечения прямых AB и BC переходит в точку E пересечения прямых DE и EF.

Аналогично докажем, что при этой симметрии вершина A переходит в вершину D, а вершина F — в вершину C. Следовательно, центр окружности есть центр симметрии шестиугольника $ABCDEF$.

Поэтому $AB = ED$, $BC = FE$ и $CD = FA$.



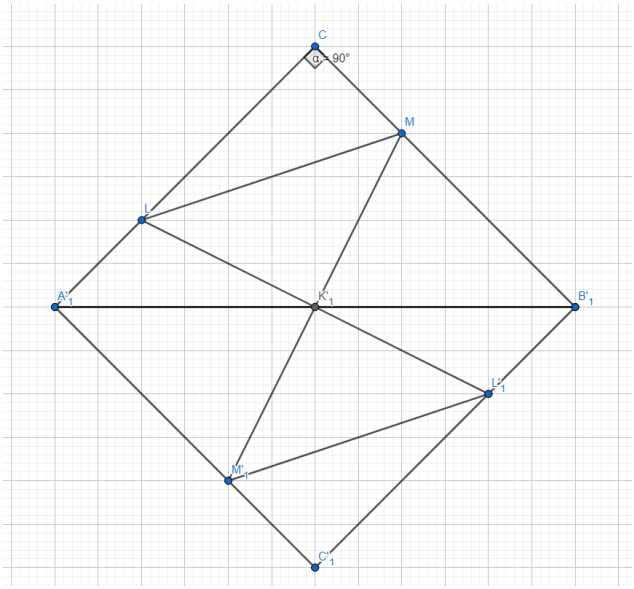
8. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.



Решение.

Первый способ. Медиана CK прямоугольного треугольника ABC равна половине гипотенузы AB, а также является высотой и биссектрисой, поэтому $CK = 0{,}5AB = BK$, $\angle KCM = 45° = \angle KBL$. Значит, треугольники KBL и KCM равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $KL = KM$ и $\angle CKM = \angle BKL$, следовательно, $\angle LKM = \angle CKM + \angle CKL = \angle BKL + \angle CKL = 90°$. Что и требовалось доказать.

Второй способ. Отразив картинку относительно точки K, мы получим квадрат $ACBC'$ и вписанный в него квадрат $LML'M'$, диагонали LL' и MM' которого пересекаются в точке K и делят его на четыре равнобедренных прямоугольных треугольника. Один из них — треугольник LMK.



Задачи для самостоятельного решения

1. Вершины параллелограмма $ABCD$ лежат на сторонах другого параллелограмма $MNKL$. Доказать, что эти параллелограммы имеют общий центр.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Найдите угол $\angle MKN$.

Ответ: 90°.

3. К окружности, вписанной в треугольник KLM, проведены касательные, параллельные его сторонам. В результате образовался шестиугольник $ABCDEF$. Найдите сторону ED,если $AD = 3$.

Ответ: 3.

4. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Найдите LK, если $MK = 5$.

Ответ: 5.

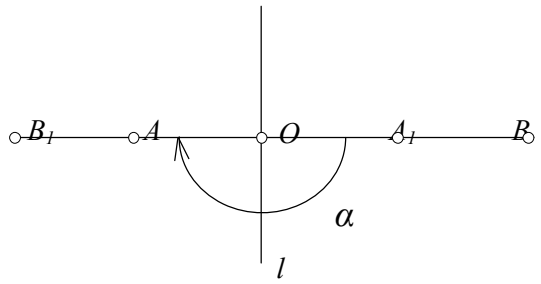
Поворот

Поворотом вокруг точки O на угол α называется преобразование плоскости, при котором точка O переходит в себя, а произвольная точка A, отличная от O, переходит в такую точку A_1, что $OA_1 = OA$ и ориентированный угол между лучами OA и OA_1 равен углу α. Точка O называется *центром поворота*, угол α – *углом поворота*. Поворот вокруг точки O на угол α обозначается R_O^{α}.

Ясно, что всегда $R_O^{\alpha+360^\circ} = R_0^{\alpha}$, поэтому обычно предполагается, что $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ либо $-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.

Теорема. Поворот плоскости является движением.

Пусть $R_0^{\alpha}(A) = A_1$и $R_0^{\alpha}(B) = B_1$. Покажем,что для любых двух точек A и B будет выполняться $A_1B_1 = AB$. Это очевидно, когда точки O, A, B коллинеарны. Если они неколлинеарны, то по определению поворота будут неколлинеарны их образы O, A_1, B_1. Из равенства $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ ориентированных углов следует равенство $\angle AOA_1 + \angle A_1OB = \angle A_1OB + \angle BOB_1$или $\angle AOB = \angle A_1OB_1$. Так как, кроме того, $OA = OA_1$ и $OB = OB_1$, треугольники OAB и OA_1B_1 равны и поэтому $A_1B_1 = AB$.



Свойства поворота:

1. Поворот на нулевой угол есть тождественное преобразование: $R_0^{0^0}=E$.

2. Преобразование, обратное повороту, есть поворот с тем жецентром на противоположный угол: $(R_0^{\alpha})^{-1} = R_0^{-\alpha}$.

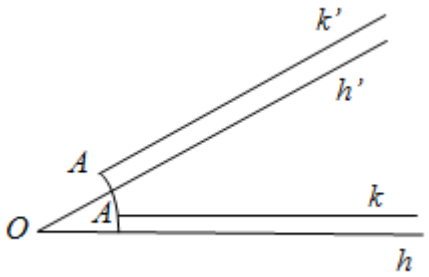
3. Композиция двух поворотов с одним и тем же центром есть поворот с тем же центром: $R_0^{\beta} \cdot R_0^{\alpha} = R_0^{\alpha+\beta}$. В частности, если α + β = 0° или α + β = 360°, то композиция есть тождественноепреобразование.

4. Композиция двух поворотов с различными центрами есть поворот (еслиα + β≠ 0° или α + β ≠ 360°) либо параллельный перенос (если α + β = 0° или α + β = 360°).

5. Поворот является движением первого рода.

6. При повороте угол между произвольным лучом и его образом равен углуповорота.

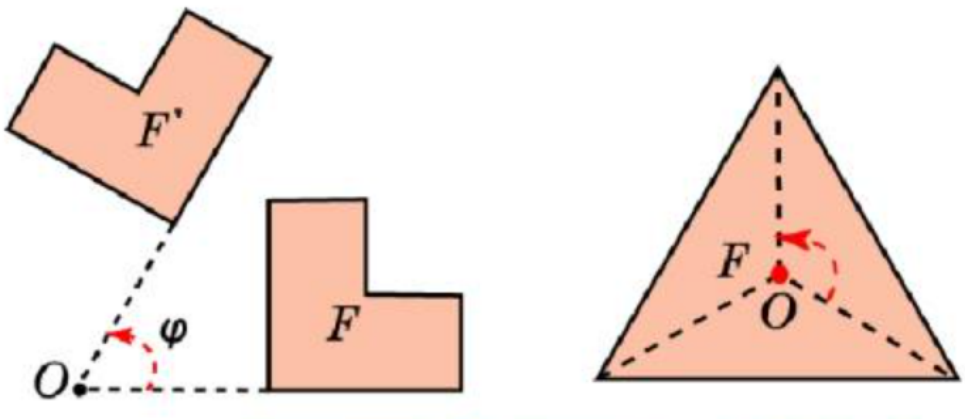
*Доказательство свойства 6.*В частном случае, когда начало данного луча совпадает с центром *O* поворота, это утверждение очевидно. Если начало луча *k* отлично от *O*, то из точки *O* проведем луч *h*, сонаправленный с лучом *k*. Так как любое движение переводит сонаправленные лучи в сонаправленные, то образы *k*' и *h*' лучей *k* и *h* тоже сонаправлены. Следовательно, угол между лучами *k* и *k*' равен углу между лучами *h* и *h*', т. е. равенуглу поворота.



7. Любой правильный *n*-угольник при повороте около его центра на угол $\alpha = \dfrac{360°}{n}$ отображается сам на себя.

Симметрия *n*-ного порядка

Говорят, что фигура *F*’ получается поворотом фигуры *F* вокруг точки *O* на угол α, если все точки фигуры F’ получаются всевозможными поворотами точек фигуры *F* вокруг точки *O* на угол α.

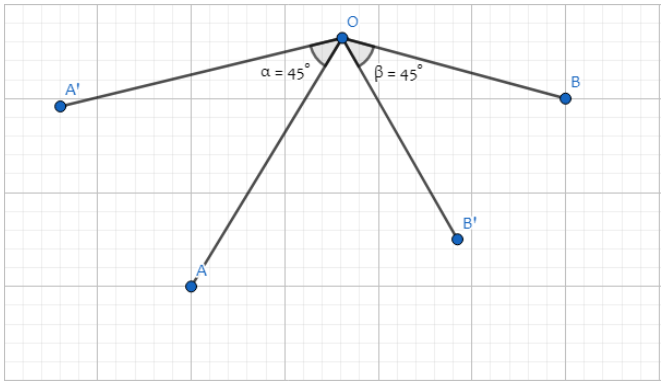


Точка *O* называется *центром симметрии n-ного порядка* фигуры *F*, если при повороте фигуры *F* вокруг точки *O* на угол $\frac{360°}{n}$ фигура *F* совмещается сама с собой.

Примеры решения задач

1. При повороте около точки *O* на угол α точка *A* переходит в точку *A*’, а точка *B* – в точку *B*’. Укажите верные равенства.

1) ∠*AOA*’ = ∠*BOB*’
2) ∠*AOB* = ∠*AOA*’
3) *OA* = *OA*’
4) *OA* = *OB*

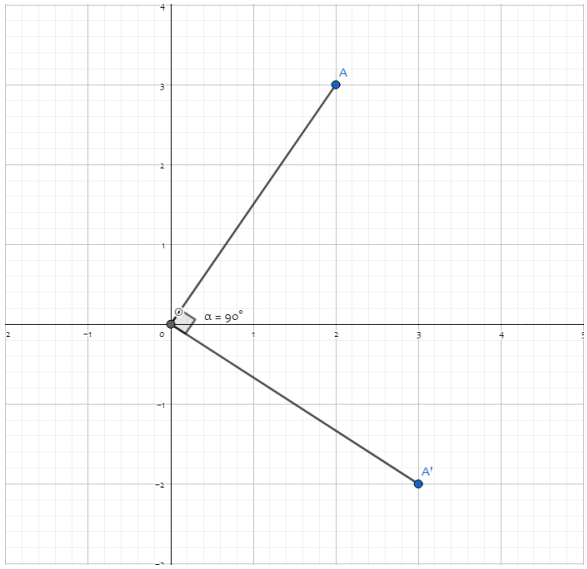


Решение. По определению ориентированный угол между

отрезками *OA* и *OA*’ равен углу поворота α. Тогда будут выполняться равенства *OA* = *OA*’ и ∠*AOA*’ = ∠*BOB*’.

Ответ: 1, 3.

2. Укажите координаты точки, в которую переходит точка *A* (2; 3) при повороте относительно начала координат на 90° по часовой стрелке.

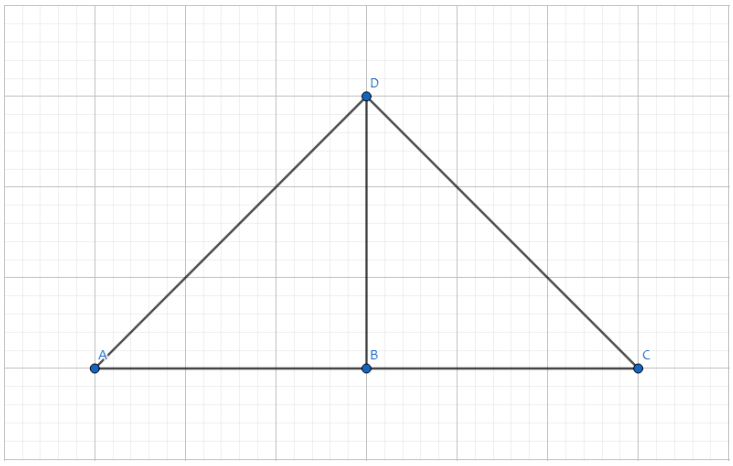


Решение.

Изобразив на координатной плоскости поворот на 90° по часовой стрелке мы получаем образ точки *A* с координатами (3; −2).

Ответ: (3; −2).

3. Два равнобедренных треугольника *ABD* и *BDC* могут быть совмещены поворотом вокруг точки *B* на угол 90°. Найдите сумму площадей этих треугольников, если длина их общей стороны равна 3.

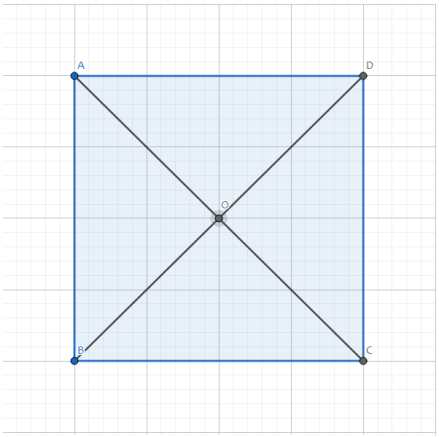


Решение. Треугольники равнобедренные с общим катетом, значит их площади равны. Тогда сумма их площадей $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 9$.

Ответ: 9.

4. Диагонали квадрата *ABCD* пересекаются в точке *O*. При повороте с центром в точке *O* квадрат отображается на себя. Найдите угол поворота.

*Решение.*Воспользуемся свойством поворота: любой правильный n-угольник при повороте около его центра на угол$\alpha = \frac{360°}{n}$отображается сам на себя. Тогда угол поворота будет равен $\frac{360°}{4} = 90°$.



Ответ: 90°.

5. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Найдите площадь треугольника DEC, если $DC = 36$.

Первый способ.

Пусть K — проекция точки D на BC, а Q — проекция точки B на AC. Точки K, D, Q и C лежат на окружности с диаметром CD. Поскольку $\angle EQD = \angle AQD - \angle AQE = 90° - 60° = 30°$, $\angle DKE = \angle DKC - \angle EKC = 90° - \angle ABC = 90° - 60° = 30°$, то отрезок DE виден из точек Q и K под одним и тем же углом.

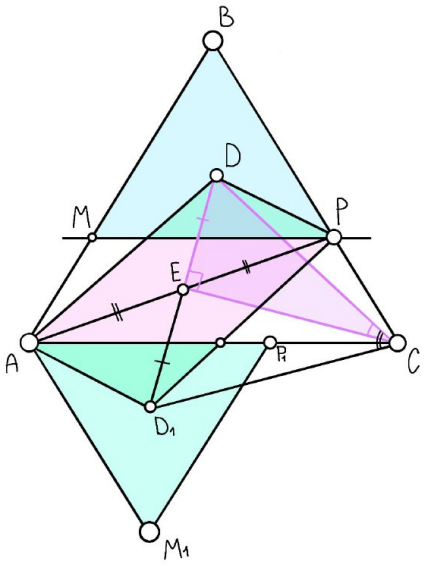
Следовательно, точки K, D, E, Q лежат на той же окружности. Поэтому $\angle DEC = 90°$, $\angle DCE = \angle DQE = 30°$. Тогда $DE = \frac{1}{2}DC = 18$, $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2} = 18\sqrt{3}$.

$S = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 18 = 162\sqrt{3}$.

Второй способ.

Повернём треугольник BMP на 60° относительно точки C так, чтобы точка B перешла в A. Тогда точка P перейдёт в точку P_1 отрезка AC, точка M — в точку M_1, лежащую вне треугольника ABC, точка D — в точку D_1, центр

треугольника AM_1P_1. Четырёхугольник DPD_1A — параллелограмм, DD_1 — его диагональ. Поэтому D_1D проходит через точку E и $D_1E = DE$. Поскольку CE — медиана равнобедренного треугольника DCD_1 ($CD = CD_1$), то $\angle CED = 90°$, а так как $\angle DCD_1 = 60°$, то $\angle DCE = 30°$. Тогда $DE = \frac{1}{2}DC = 18$, $EC = \sqrt{DC^2 - DE^2} = 18\sqrt{3}$. $S = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 18 = 162\sqrt{3}$.



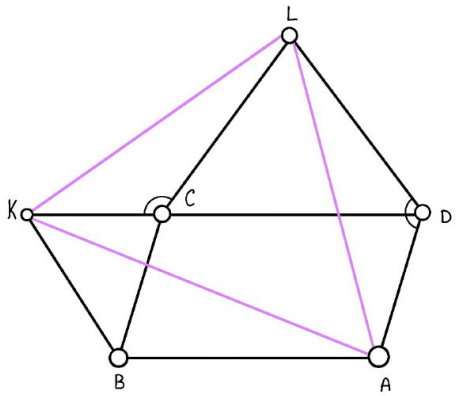
Ответ: $162\sqrt{3}$.

6. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Найдите радиус вписанной в треугольник AKL окружности, если $KL = 10\sqrt{3}$.

Решение

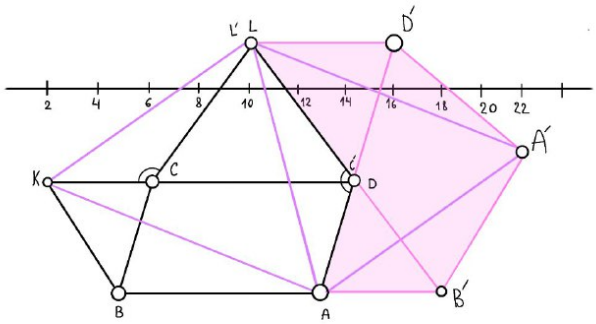
Первый способ.

Обозначим $\angle BCD = \alpha$. Рассмотрим случай, когда $\alpha < 60°$. Поскольку $KC = BC = AD$, $CL = LD$, $\angle KCL = \angle KCB + \angle BCD + \angle DCL = 60° + \alpha + 60° = 120° + \alpha$, $\angle ADL = 360° - \angle ADC - \angle CDL = 360° - (180° - \alpha) - 60° = 120° + \alpha$. то треугольники KCL и ADL равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $KL = AL$. Точно так же докажем, что $KL = AK$. Аналогично для остальных случаев. Значит, треугольник AKL – равносторонний. Тогда радиус вписанной окружности равен $\frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5$.



Второй способ.

При повороте на угол 60° векторы $\overrightarrow{LC}$ и $\overrightarrow{CK}$ переходят в векторы $\overrightarrow{LD}$ и $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. Следовательно, при этом повороте вектор $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK}$ переходит в вектор $\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{LA}$. Поэтому треугольник AKL — равносторонний. Тогда радиус вписанной окружности равен $\frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5$.

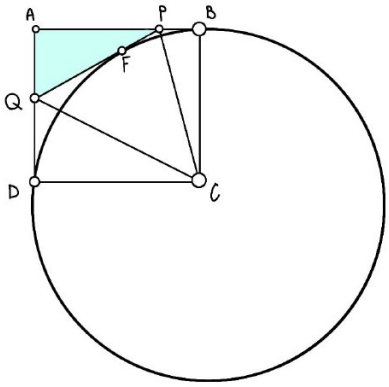


Ответ: 5

7. Сторона квадрата *ABCD* равна 1. На сторонах *AB* и *AD* выбраны точки *P* и *Q*, причём периметр треугольника *APQ* равен 2. Найдите ∠*PCQ*.

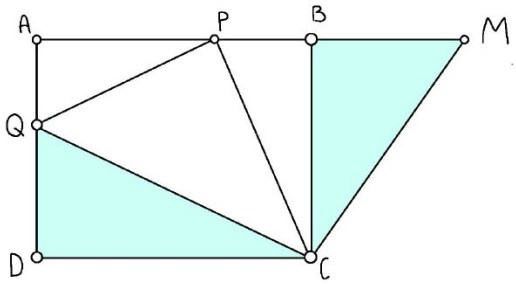
Первый способ.

Пусть вневписанная окружность треугольника *APQ* касается гипотенузы *PQ* в точке *F*, а продолжений катетов *AP* и *AQ* — в точках *X* и *Y* соответственно. Тогда $AX + AY = AP + PX + AQ + QY = AP + PF + AQ + QF = AP + AQ + (PF + QF) = AP + AQ + PQ = 2$, а так как $AX = AY$, то $AX = AB$ и $AY = AD$, т. е. точка *X* совпадает с точкой *B*, а точка *Y* — с точкой *D*. Поэтому *C* — центр окружности. Следовательно, $\angle PCQ = 90^\circ - 0{,}5 \cdot \angle BAC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.



Второй способ.

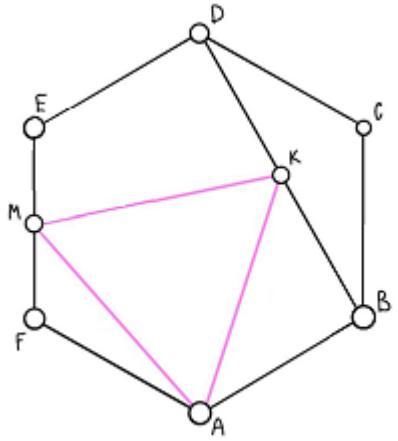
Пусть *M* — образ точки *D* при повороте на 90° по часовой стрелке вокруг точки *C*. Тогда точка *M* лежит



на прямой AB. Поскольку $PM = PB + BM = PB + DQ = 2 - AP - AQ = PQ$, то треугольники CPM и CPQ равны по трём сторонам, а так как $\angle QCM = 90^\circ$, то $\angle PCQ = \angle PCM = 45^\circ$.

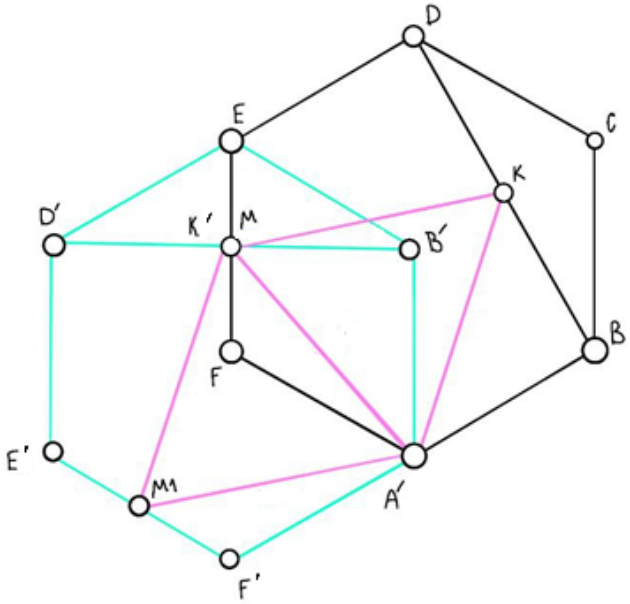
Ответ: 45°.

8. Шестиугольник $ABCDEF$ – правильный, K и M – середины отрезков BD и EF. Найдите радиус вписанной в треугольник AMK окружности, если $AM = 5$.



Решение

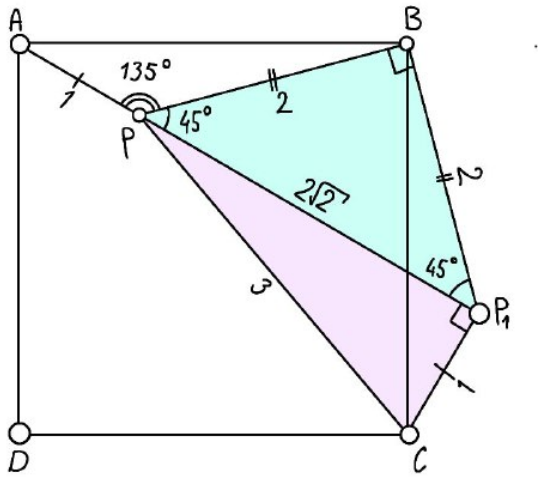
Заметим, что точка K – середина отрезка OC, где O – центр данного правильного шестиугольника. При повороте на 60° относительно точки A, переводящем точку O в точку B, вершина F переходит в точку O, а вершина E – в точку C. Поэтому середина M отрезка FE переходит в середину K отрезка OC. Следовательно, треугольник AMK – равносторонний. Тогда радиус вписанной в него окружности равен $\frac{5}{2\sqrt{3}}$.



Ответ: $\frac{5}{2\sqrt{3}}$.

9. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причём $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB.

Решение



Будем считать, что $AP = 1$, $BP = 2$, $CP = 3$. Пусть P_1 — образ точки P при повороте на 90° вокруг вершины B, переводящем точку A в C. Тогда PBP_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник. Поэтому $\angle BP_1P = 45°$, $P_1P = 2\sqrt{2}$. Следовательно, $PP_1^2 + P_1C^2 = 8 + 1 = 9 = 3^2 = PC^2$. Значит, треугольник PP_1C — прямоугольный, $\angle PP_1C = 90°$. Следовательно, $\angle APB = \angle CP_1B = \angle CP_1P + \angle BP_1P = 90° + 45° = 135°$.

Ответ: 135°.

Задачи для самостоятельного решения

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны по 90°, стороны BC, CD и AE равны по 1 и сумма сторон AB и DE равна 1. Найдите площадь пятиугольника.

Ответ: 1.

2. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P - середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

3. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 60°. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N, причём $AM = BN$. Найдите радиус вписанной в треугольник MDN окружности, если $MD = 4$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

4. В ромбе $ABCD$ угол ABC равен 120°. На сторонах AB и BC взяты точки P и Q, причём $AP = BQ$. Найдите периметр треугольника PQD, если $PQ = 3$.

Ответ: 9.

5. Внутри равностороннего треугольника ABC выбрали такую точку M, что $\angle AMB = 120°$, $MA = 1$, $MB = 2$. Найдите MC.

Ответ: $\sqrt{3}$.